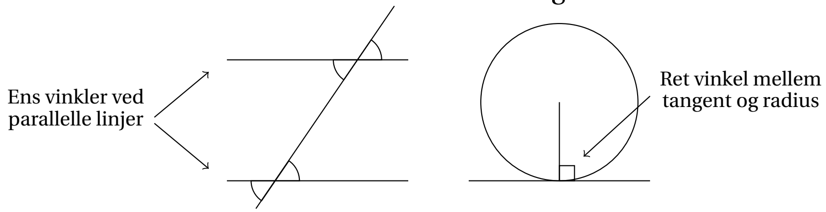
Geometri

Værktøjskasse

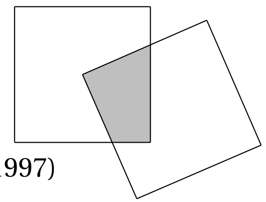
Se grundigt på figuren og overvej:

- Hvilke vinkler kender du? Er der flere du kan regne ud?



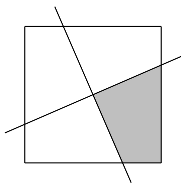
- Er der retvinklede trekanter, eller kan du danne nogle som er interessante at bruge Pythagoras' sætning på?
- Er der ligebenede trekanter, og kan du ud fra dem slutte noget om vinkler eller sidelængder?
- Er der ensvinklede trekanter, eller kan du danne nogle? Se på forholdet mellem dem.
- Kan du udnytte en symmetri?
- Kan du opdele figuren på en smart måde?
- Kan du indføre centrale variable og opstille ligninger de indgår i?

Eksempler



A. Opdel figuren, og udnyt symmetri

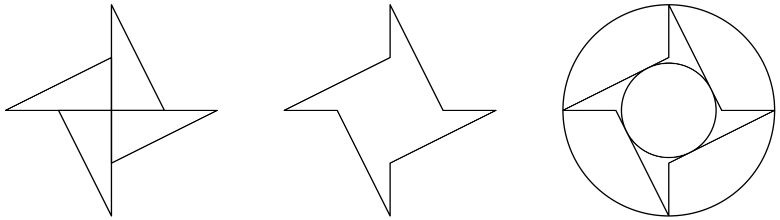
To kvadrater med sidelængde 1 er anbragt så det ene har en vinkelspids i det andets midtpunkt. Bestem arealet af de grå område. (Georg Mohr-Konkurrencen 1997)

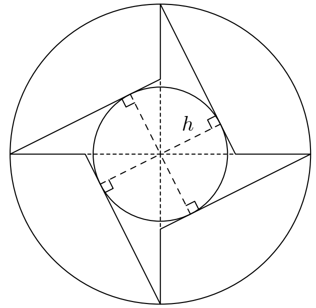


Løsning Ved indtegning af de viste hjælpelinjer deles kvadratet i fire dele. Da de fire dele føres over i hinanden ved en drejning på 90° omkring kvadratets midtpunkt, er de fire dele kongruente og har derfor samme areal. Det grå område har dermed areal $\frac{1}{4}$.

B. Retvinklede trekanter, vinkler og central variabel

Fire retvinklede trekanter hver med kateterne 1 og 2 samles til en figur som vist. Hvor stor en brøkdel udgør den lille cirkels areal af den stores? (Georg Mohr-Konkurrencen 2010)





Løsning Når vi skal finde ud af hvor stor en brøkdel den lille cirkels areal udgør af den stores, er det en god idé at finde de to cirklers radier. Ser vi på figuren, er radius i den store cirkel nem at bestemme da den er længden af trekantens længste katete, dvs. 2. Den store cirkels areal er altså $2^2\pi = 4\pi$.

Radius i den lille cirkel er sværere at få styr på. Da trekanternes hypotenuser tangerer den lille cirkel, så er højden på hypotenusen i de retvinklede trekanter lig med radius i den lille cirkel. For at bestemme højden indfører vi variablen h, og opstiller en ligning den opfylder.

Først udnytter vi at det er en retvinklet trekant, til at bestemme længden af hypotenusen vha. Pythagoras' sætning: $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Højden h kan nu findes ved at udtrykke arealet af en af trekanterne på to måder:

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{2}\cdot h\cdot\sqrt{5}.$$

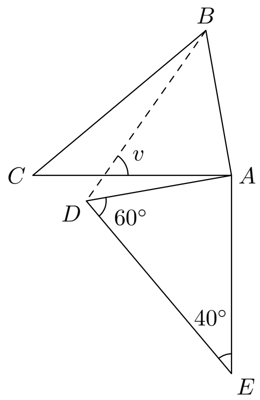
Ved at omskrive fås $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Den lille cirkels areal er dermed $(\frac{2}{\sqrt{5}})^2\cdot\pi = \frac{4}{5}\pi$, og den lille cirkels areal udgør derfor

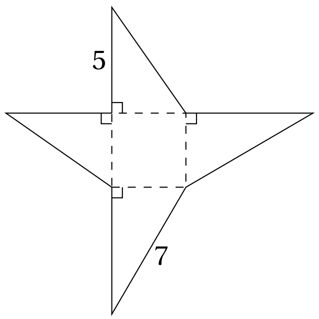
$$\frac{\frac{4}{5}\pi}{4\pi} = \frac{1}{5}$$

af den store cirkels areal.

Opgaver

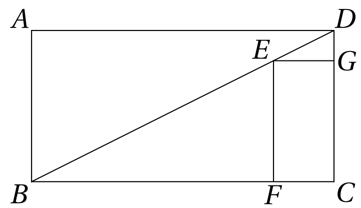
Opgave 1 I figuren til højre fremkommer trekant ADE af trekant ABC ved en drejning på 90° om punktet A. Hvis vinkel D er 60°, og vinkel E er 40°, hvor stor er så vinkel v?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2009)

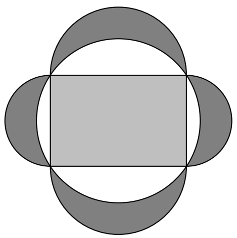




Opgave 2 Figuren stammer fra et udklipsark. Når sidefladerne foldes op langs de stiplede linjer, fremkommer en (ikke ligesidet) pyramide med kvadratisk grundflade. Beregn grundfladens areal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2005)

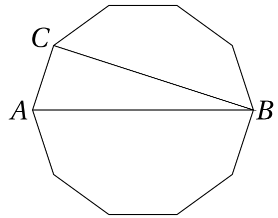
Opgave 3 Rektanglet $ABCD$ er dobbelt så bredt som det er højt, og rektanglet $EFCG$ er dobbelt så højt som det er bredt. Punktet E ligger på diagonalen BD. Hvor stor en brøkdel udgør det lille rektangels areal af det stores?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2004)

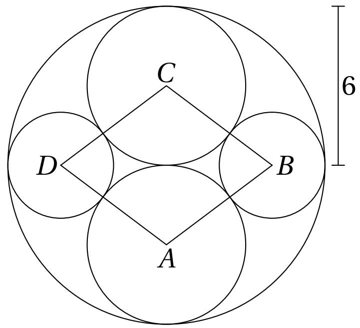




Opgave 4 Figuren viser et rektangel, dets omskrevne cirkel og fire halvcirkler, der har rektanglets sider som diametre. Bevis at de fire mørkegrå måneformede områders arealer tilsammen er lig med arealet af det lysegrå rektangel.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2013)

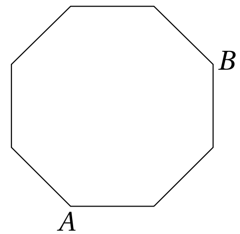
Opgave 5 I en regulær tikant ligger trekant ABC som vist på figuren. Hvor stor en brøkdel udgør trekantens areal af hele tikantens areal?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

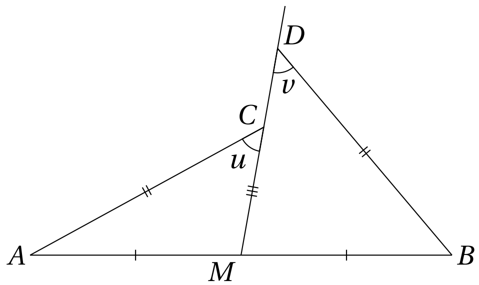




Opgave 6 Inden i en cirkel med radius 6 ligger fire mindre cirkler med centre A, B, C og D. Cirklerne rører hinanden som vist. Det punkt hvori cirklerne med centrum i A og C rører hinanden, er den store cirkels centrum. Beregn arealet af firkant $ABCD$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2012)

Opgave 7 I ottekanten har alle sider længden 1, og alle vinkler er lige store. Bestem afstanden mellem hjørnerne A og B.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2011)





Opgave 8 På en halvlinje fra midtpunktet M af et linjestykke AB ligger punkterne C og D så $|AC| = |BD|$. Bevis at vinklerne $u = \angle ACM$ og $v = \angle BDM$ er lige store.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2014)

Hints og løsningsskitser

Hint opgave 1 Hvor store er vinklerne i trekant ABD?

Hint opgave 2 Kald kvadratets sidelængde for x. Hvilke sider på figuren er lige lange? Brug Pythagoras' sætning.

Hint opgave 3 Kald længden af linjestykket DG for x, og betragt trekant DEG. Bestem længden af andre linjestykker udtrykt ved x.

Hint opgave 4 Tegn diagonalen i rektanglet, og indfør centrale variable.

Hint opgave 5 Inddel tikanten smart så arealerne kan sammenlignes. Du skal stort set ikke regne!

Hint opgave 6 Tegn diagonalerne i firkanten, og overvej hvad der dannes. Kald den lille cirkels radius for r, og udtryk andre længder ved r.

Hint opgave 7 Forlæng en af siderne med endepunkt A og en af siderne med endepunkt B så der dannes en retvinklet ligebenet trekant.

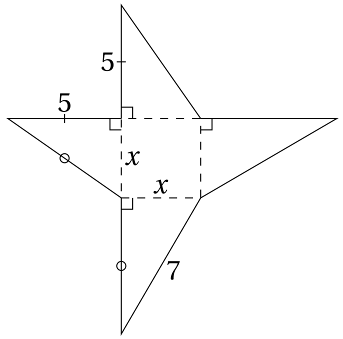
Hint opgave 8 Kan du konstruere en kopi af trekant ACM et smart sted på figuren?

Opgave 1 Vinkelsummen i en trekant er 180°, og derfor er

$$\angle DAE = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ.$$

Da trekant ADE fremkommer ved at dreje trekant ABC 90° om punktet A, er $|AB| = |AD|$, $\angle BAD = 90^\circ$ og $\angle BAC = \angle DAE = 80^\circ$. Dermed er trekant ABD en retvinklet ligebenet trekant, og altså er $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$. Lad F være skæringspunktet mellem linjerne AC og BD, og betragt trekant ABF. Da vi nu kender to af vinklerne i trekant ABF, kan vi udregne vinkel v:

$$\begin{aligned} v &= 180^\circ - \angle FAB - \angle FBA \\ &= 180^\circ - \angle CAB - \angle DBA \\ &= 180^\circ - 180^\circ - 45^\circ = 55^\circ. \end{aligned}$$



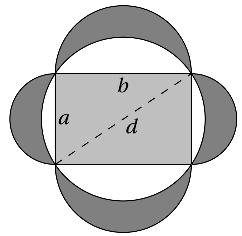
Opgave 2 Sidelængden i den kvadratiske grundflade kaldes x. Hypotenusen i en retvinklet trekant med kateterne x og 5 danner fælles kant i pyramiden med en katete i en retvinklet trekant hvor den anden katete er x, og hypotenusen er 7. Ifølge Pythagoras gælder så $x^2 + 5^2 = 7^2 - x^2$. Dermed er grundfladens areal

$$x^2 = \frac{49-25}{2} = 12.$$

Opgave 3 Kald længden af linjestykket DG for x. Trekanterne EGD og BCD er ensvinklede da siderne BC og EG er parallelle. Da BC er dobbelt så lang som CD, må EG også være dobbelt så lang som GD, altså $|EG| = 2x$. Yderligere er GC dobbelt så lang som EG, altså $|GC| = 4x$. Det lille rektangel $EFCG$ har derfor sidelængderne $2x$ og $4x$, mens det store rektangel $ABCD$ har sidelængderne $|DC| = |DG| + |GC| = 5x$ og $|BC| = 2|DC| = 10x$. Arealet af det lille rektangel udgør dermed brøkdelen

$$\frac{2x \cdot 4x}{5x \cdot 10x} = \frac{4}{25}$$

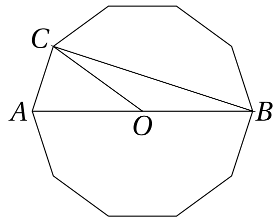
af arealet af det store rektangel.



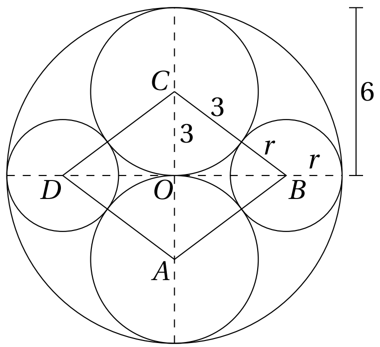
Opgave 4 Kald rektanglets sider for a og b og diagonalen for d. Arealet af de to halvcirkler med diameter a er tilsammen $(\frac{a}{2})^2\pi$, arealet af de to halvcirkler med diameter b er tilsammen $(\frac{b}{2})^2\pi$, og dermed er arealet af de fire halvcirkler tilsammen $((\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2)\pi$. Arealet af rektanglets omskrevne cirkel med diameter d er $(\frac{d}{2})^2\pi$. Ifølge Pythagoras' sætning er $a^2 + b^2 = d^2$, dvs. $(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 = (\frac{d}{2})^2$. Altså er arealet af de fire halvcirkler lig med arealet af rektanglets omskrevne cirkel. Arealet af de hvide områder på figuren er lig med arealet af rektanglets omskrevne cirkel minus arealet af rektanglet. Arealet af de fire mørkegrå måneformede områder er derfor lig med

$$\begin{aligned} &\text{areal af de fire halvcirkler} - (\text{areal af den omskrevne cirkel} - \text{areal af rektanglet}) \\ &= \text{areal af rektanglet} \end{aligned}$$

Opgave 5 Lad O være tikantens midtpunkt. Punktet O er midtpunktet af AB, og ved at forbinde O med tikantens hjørner opdeles tikanten i ti kongruente trekanter. Dermed udgør arealet af trekant AOC en tiendedel af tikantens areal. Trekant ABC har dobbelt så stort areal som trekant AOC da grundlinjen AB i trekant ABC er dobbelt så lang som grundlinjen AO i trekant AOC, mens højden fra C er den samme. Trekant ABC udgør altså $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ af tikantens areal.



Opgave 6 Lad O være centrum i den ydre cirkel, og lad r være radius i cirklen med centrum i B. Pga. symmetri skærer diagonalerne i firkant $ABCD$ hinanden i O og deler firkanten i fire kongruente retvinklede trekanter.

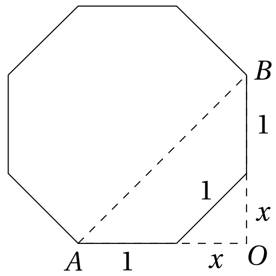


Sidelængerne i trekant BCO er $|OC| = 3$, $|BC| = 3 + r$ og $|OB| = 6 - r$. Pythagoras' sætning anvendt på trekant BCO giver at

$$(3+r)^2 = (6-r)^2 + 3^2 \Leftrightarrow 9 + r^2 + 6r = 36 + r^2 - 12r + 9 \Leftrightarrow r = 2.$$

Trekant BCO er dermed retvinklet med sidelængderne 3, 4 og 5. Altså er firkant $ABCD$ sammensat af fire retvinklede trekanter hver med arealet 6, dvs. firkantens areal er 24.

Opgave 7 Forlæng to af siderne som vist på figuren, så der dannes en ligebenet retvinklet trekant AOB hvor katetelængden er $1 + x$ (overvej hvorfor trekanten bliver ligebenet og retvinklet). Da x er katete i en ligebenet retvinklet trekant med hypotenuse 1, fås af Pythagoas' sætning at $x^2 + x^2 = 1^2$ og altså $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Trekant AOB og den lille trekant med katete x er ensvinklede med forholdet

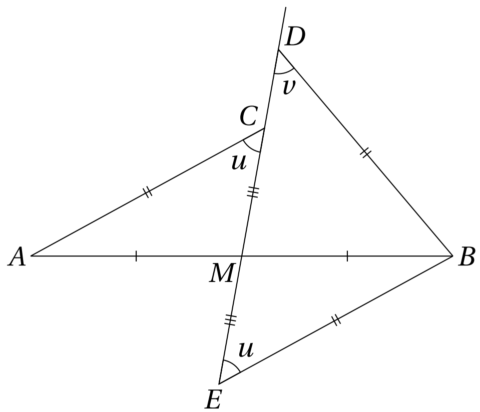


$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Derfor er

$$|AB| = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 1 = 1 + \sqrt{2}.$$

Opgave 8 Afsæt punktet E på halvlinjens forlængelse så $|ME| = |MC|$. Da desuden $|MB| = |MA|$, og $\angle BME$ og $\angle AMC$ er topvinkler, er trekanterne BME og AMC kongruente.



Heraf følger dels $\angle BEM = u$, dels $|BE| = |AC|$ og dermed $|BE| = |BD|$. Trekant EDB er altså ligebenet, og derfor er vinklerne u og v lige store.